ORTHOGONALE FUNKTIONENSYSTEME & SEPARATION DER VARIABLEN

Orthogonale Funktionensysteme und Trennung der Variablen sind zwei wichtige Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen.

[P12] *Trennung der Variablen in kartesischen Koordinaten*

Zwei geerdete Metallplatten liegen parallel zur xz-Ebene im Abstand a parallel übereinander. Bei $x = 0$ sind die beiden Platten durch einen senkrechten Streifen miteinander verbunden, der ein y-abhängiges Potential $\Phi_0(y)$ trägt.

(a) Geben Sie die Randbedingungen für das Potential $\Phi(x, y, z)$ im Bereich $x > 0$, $0 < y < a$ an, es sollten vier Stück sein. *Hinweis*: Die Randbedingung im Unendlichen ist hier erforderlich.

(b) Stellen Sie die Laplace-Gleichung auf und machen Sie den Ansatz $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)$. Warum hängt das Potential nicht explizit von z ab? Vereinfachen Sie so weit, bis Sie zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhalten. Lösen Sie diese allgemein unter der Annahme, die Konstante der y-abhängigen DGL ist die negative Konstante.

(c) Eliminieren Sie mit Hilfe der Randbedingungen nun so viele Integrationsvariablen wie möglich. Für eine Konstante wird es mehrere Lösungen geben, die eine Randbedingung erfüllen. Wie berücksichtigen Sie dies in der Lösung für $\Phi(x, y)$?

(d) Wenn alles richtig ist, sollte das Potential bis jetzt irgendwie so aussehen:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a)\,.$$

Nun versuchen Sie mit der letzten verbliebenen Randbedingung ein Integral zu erhalten, mit dem Sie die C_n bestimmen können. Beachten Sie dazu, dass die Funktionen $\sin(n\pi y/a)$ ein orthogonales Funktionensystem bilden.

(e) Das auf dem Streifen vorgegebene Potential sei konstant, d.h., $\Phi_0(y) \equiv \phi_0 = \mathrm{const}$. Bestimmen Sie für diesen Fall die C_n und die Lösung der Laplace-Gleichung.

[P13] *Legendre-Polynome*

Die Legendre-Polynome sind ein Beispiel für ein orthogonales Funktionensystem. Sie treten auf, wenn man das Potential von Ladungsverteilungen für große Abstände bestimmen möchte.

(a) Entwickeln Sie das Coulomb-Potential einer Punktladung q bei $\vec{r}\,'$ für große Abstände $r \gg r'$ bis zur zweiten Ordnung in $\frac{r'}{r}$,

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r\sqrt{1 - 2\cos(\vartheta)\frac{r'}{r} + (\frac{r'}{r})^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\big(\cos(\vartheta)\big)\left(\frac{r'}{r}\right)^n ,$$

Hinweis: Es macht das Leben einfacher, die Abkürzungen $x = \cos(\vartheta)$ und $y = \frac{r'}{r}$ einzuführen und in y zu entwickeln.

(b) Die Legendre-Polynome lassen sich leichter mit der Rodrigues-Formel oder über Rekursion,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2 - 1)^n\Big) = \frac{2n-1}{n}\,x\,P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\,P_{n-2}(x)\,,$$

bestimmen. Zeigen Sie mit der Rodrigues-Formel die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_m(x)\, P_n(x) = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{m,n}\,.$$

Hinweise: Beachten Sie, dass die Stammfunktion von $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big((x^2-1)^n\big)$ für $0 < k \leq n$ so gewählt werden kann, dass sie jeweils eine Nullstelle an den beiden Integrationsgrenzen -1 und $+1$ hat. Nützlich ist auch die leicht mit partieller Integration zu zeigende Identität

$$I_n \equiv \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\,(1 - x^2)^n = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\,\Big(1 - \frac{x}{2}(2x)\Big)(1 - x^2)^{n-1} = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n\,,$$

mit deren Hilfe I_n rekursiv berechnet werden kann.